

ЛЕКЦИЯ 6. Работа. Энергия.

А.И. Валишев, В.Г. Сербо .

11. Работа.

Рассматривается перемещение частицы по некоторому пути из начальной точки 1, заданной радиус вектором r_1 в конечную 2 с радиус-вектором r_2 . На частицу действует сила $F(r)$.

11.1.

Df. Элементарная работа dA равна скалярному произведению силы F на элемент перемещения dl :

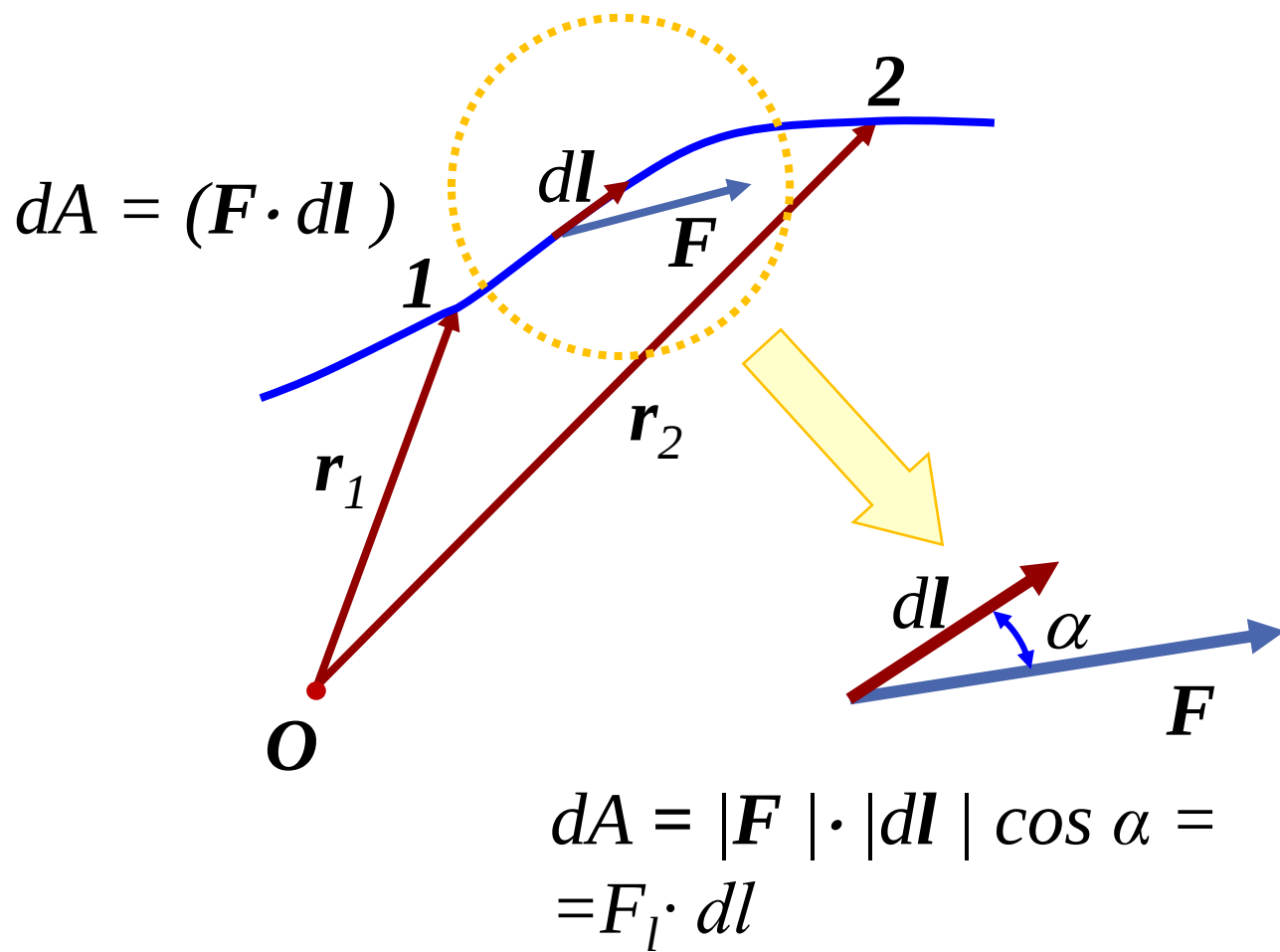
$$dA = (F(r) \cdot dl);$$

В результате тождественных преобразований:

$$(F(r) \cdot dl) = |F| \cdot |dl| \cdot \cos \alpha = F_l dl.$$

Df. Работа силы на конечном пути из т. 1 в т. 2 складывается из элементарных работ dA на каждом бесконечно малом участке:

$$A_{12} = \int_1^2 (F \cdot dl) = \int_1^2 F_l \cdot dl.$$



11.2.

Df. Кинетическая энергия частицы K .

$$K = (1/2) \cdot m\mathbf{v}^2 = \mathbf{p}^2 / (2m) .$$

11.3. Соотношение работа - кинетическая энергия.

Если совершена элементарная работа dA , тогда:

$$\begin{aligned} dA &= (F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}) = (m(d\mathbf{v}/dt) \cdot d\mathbf{l}) = \\ &= (m(d\mathbf{v}/dt) \cdot \mathbf{v}dt) = m \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d(\tfrac{1}{2}(m\mathbf{v}^2)) = \\ &= dK . \end{aligned}$$

Совершенная работа меняет кинетическую энергию.

Интегрируя правую и левую части на участке 1-2 имеем:

$$A_{12} = \int_1^2 (F \cdot dl) = \int_1^2 dK = K_2 - K_1$$

«Изменение кинетической энергии частицы равно работе, действующей на частицу силы».

$$A_{12} = K_2 - K_1 = (1/2) \cdot m v_2^2 - (1/2) \cdot m v_1^2.$$

Nb. Работа, будучи интегральной характеристикой, определяет соотношение между локальными значениями скоростей v_1 , v_2 .

11.4. Мощность.

Df. Мощностью называется работа силы за единицу времени:

$$N = dA/dt = (F(r) \cdot dl / dt) = (F \cdot v).$$

Единицы измерения работы:

- система СИ 1 Джоуль: 1 Дж = 1 Н · 1м

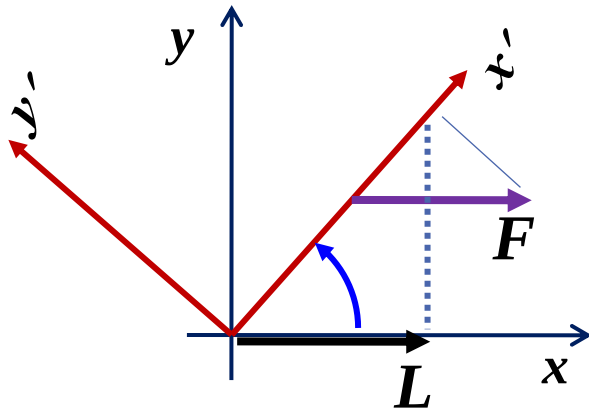
- система CGS 1 эрг: 1 эрг = 1 д · 1см

Единицы измерения мощности

- система Си 1 Ватт: 1 Вт = 1 Дж / 1 с

1 л.с. = 736 Вт

Пример. Инвариантность работы при повороте координатных осей.

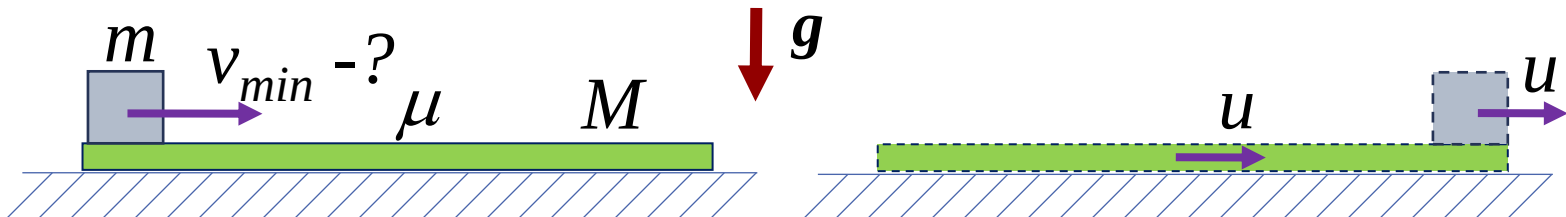


Работа силы (скаляр) инвариантна относительно поворота координатных осей. Действительно работа – суть скалярное произведение векторов, не меняется при повороте координатных осей.

$$(\vec{F} \cdot \vec{L}) = (\vec{F}' \cdot \vec{L}').$$

Пример. Движение бруска с трением по доске, длины l .

Тело массы m толкнули с начальной скоростью на левом конце доски длины l массы M . Найти минимальную начальную скорость v_{min} тела чтобы оно достигло правого края доски. Коэффициент трения $-\mu$. Сила трения между доской и телом $F_{TP} = \mu N = \mu mg$, трение между столом и доской отсутствует.



Решение.

Энергетический подход. Работа силы трения равна изменению кинетической энергии системы. (потенциальная не меняется).

$$A_{TP} = (\vec{F}_{TP} \cdot \vec{l}) = -\mu m g l = \frac{(m + M)}{2} u^2 - \frac{m v_{\min}^2}{2},$$

Сохранение импульса: $m v_{\min} = (m + M) u,$

$$v_{\min} = \sqrt{2\mu m g l \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Динамический подход. Определение ускорений тела и доски. Обнуление относительного ускорения на правом конце доски. Ответ прежний.

12. Потенциальные (консервативные) силы. Потенциальная энергия.

12.1.1. Поле.

Всюду в пространстве задана некоторая функция координат $f(\mathbf{r})$.

Если функция $f(\mathbf{r})$ – скалярная, то задано скалярное поле.

Пример. Поле температур $T(\mathbf{r})$. Поле атмосферного давления $p(\mathbf{r})$.

Если функция $f(\mathbf{r})$ – векторная. Задано векторное поле.

Примеры. Поле скоростей жидкости в потоке $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

Поле скоростей воздушных масс в атмосфере $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

12.1.2. Потенциальная (консервативная) сила.

Df. Если работа силы по любому замкнутому пути равна нулю, то такая сила является потенциальной (консервативной).

$$\oint (\vec{F} d\vec{l}) = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) - \text{potential force}.$$

Упражнение. Доказать независимость интеграла $\int_1^2 (F \cdot dl)$ от формы пути для консервативной силы.

12.1.3. Потенциальная энергия.

«Изменение потенциальной энергии между т.1 и т.2 равно отрицательной работе консервативной силы»

$$U(r_2) - U(r_1) = -\int_1^2 (F \cdot dl) = -A_{12}.$$

12.1.4. Соотношение между силой и потенциальной энергией.

В случае дифференциально малого изменения координаты

$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \rightarrow 0$ получаем:

$$dU = -F \cdot d\mathbf{l} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Отсюда:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z};$$

12.1.4. Соотношение между силой и потенциальной энергией в векторной форме:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} , \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y} , \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z} ;$$

$$\vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = - \vec{\nabla} U = - grad U ;$$

Дифференциальная операция $\partial/\partial \mathbf{r}$ обозначается также как ∇ называется градиентом – *grad*.

Градиент скалярной функции $U(r)$ ставит в соответствие вектор F .

Пример 1. Доказать: сила трения не является потенциальной.

Указание. Вычислить работу силы трения по замкнутому контуру:

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = \oint (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt < 0 \neq 0.$$

Пример 2.

Вычисление работы как интеграла вдоль траектории.

Сила задана вектором $F = (F_x, F_y) = \alpha (y, 2x)$, $\alpha - \text{const}$.

Определим работу силы при перемещении из начала координат (точка O), в точку $P = l(1,1)$, $l = \text{const}$.

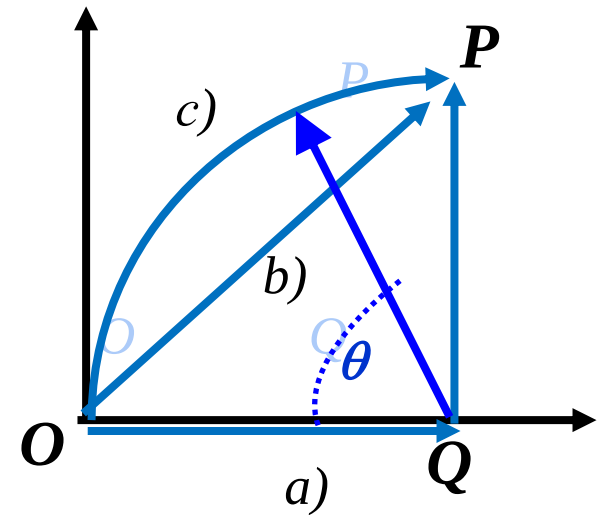
Рассматривается три траектории из т. O в т. P .

a. Перемещение совершается сначала в точку Q , потом в P :

$$\begin{aligned} A_a &= \int_a \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^Q F_x dx + \int_Q^P F_y dy = \\ &= l \int_0^1 (y=0) dx + \alpha l^2 \int_0^1 2(x=1) dy = 2\alpha l^2; \end{aligned}$$

b. Перемещение вдоль линии $x = y$: ($dx = dy$):

$$A_b = \int_b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^P F_x dx + \int_0^P F_y dy = \alpha l^2 \int_0^1 y dx + \alpha l^2 \int_0^1 2x dy = \alpha l^2 \int_0^1 3x dx = \alpha l^2 \frac{3}{2};$$



**с. Перемещение из O в P
по дуге окружности:**

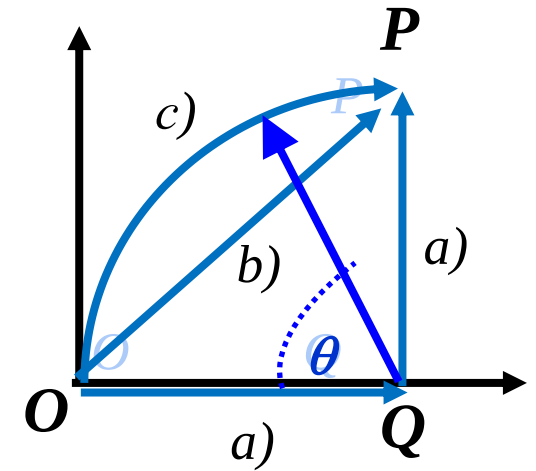
$$\vec{r} = (x, y) = l(1 - \cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = l(dx, dy) = l(\sin \theta d\theta, \cos \theta d\theta)$$

$$\vec{F} = \alpha(y, 2x) = \alpha(\sin \theta, 2(1 - \cos \theta)) \text{ -сила, выраженная через переменную } \theta$$

$$A_c = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \alpha l^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta + 2(1 - \cos \theta) \cos \theta) \cdot d\theta ;$$

$$A_c = \alpha l^2 \left(2 - \frac{\pi}{4} \right) \cong \alpha l^2 \cdot 1,2 ;$$

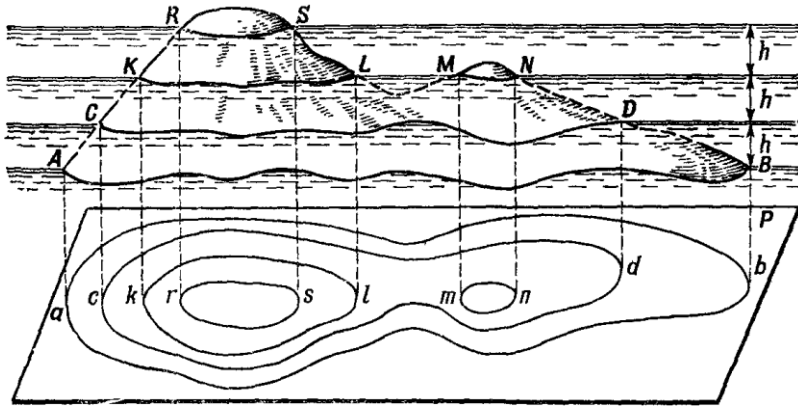


Показано:

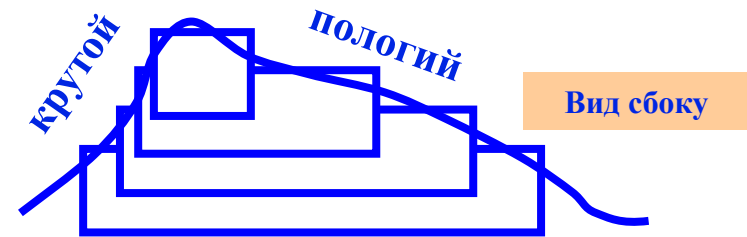
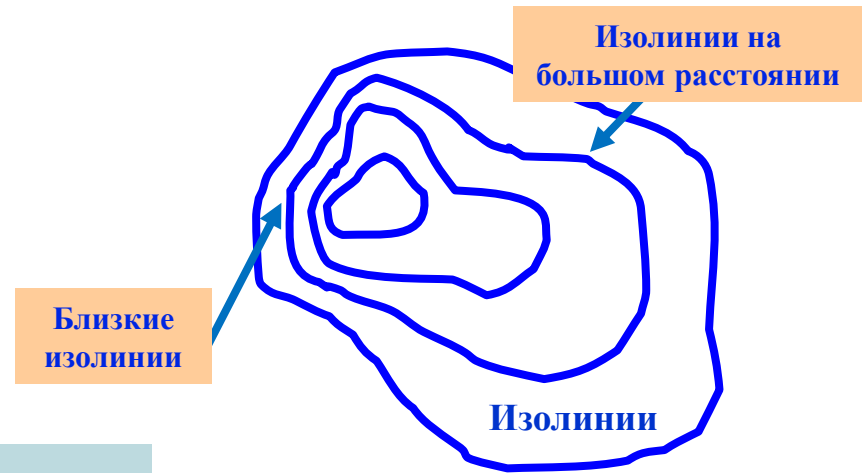
работа заданной силы ЗАВИСИТ! от формы траектории.

Ранее определено: существует специальный класс сил (потенциальные силы), которые совершают работу, не! зависящую от пути перемещения из начальной точки в конечную.

Градиент.



Скалярное поле есть физический параметр, связанный с каждой точкой в пространстве (в частности на плоскости), определяемый только числовым значением. Например, высота рельефа $h(x,y)$.

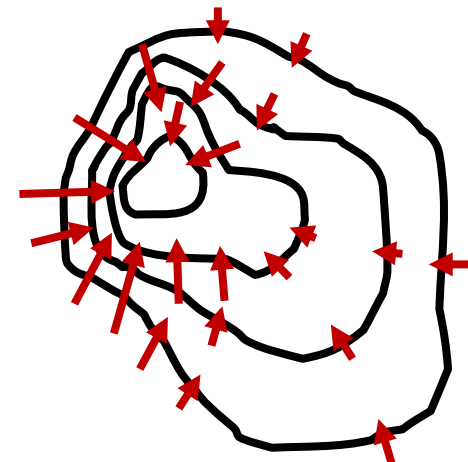


■ В векторном поле физический параметр определяется величиной и направлением.

■ Векторное поле силы тяжести тесно связано с изолиниями (линиями одинаковой потенциальной энергии) или линиями уровня.

■ Чем теснее изолинии, тем быстрее меняется скалярное поле, тем больше градиент.

Вектор градиента указывает направление скорейшего подъема



12.2. Поле одномерной силы.

Задана одномерная сила: $F(\mathbf{r}) = (f(x), 0, 0)$. Определим работу силы по некоторому замкнутому контуру. Контур пресекается 2-я плоскостями отстоящими на малое расстояние dx . Поскольку $F(\mathbf{r}_1) d\mathbf{l}_1 + F(\mathbf{r}_2) d\mathbf{l}_2 = 0$, что следует из $f(x) dx - f(x) dx = 0$ получаем:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

Одномерными силами являются

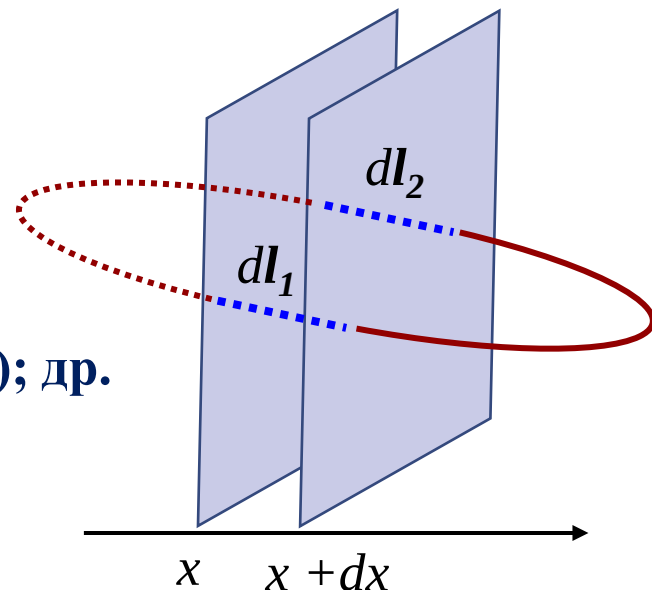
- 1) сила тяжести;
- 2) Сила упругости (сила в линейном осцилляторе); др.

1) Потенциальная энергия в поле силы тяжести:

$$f(x) = -mg, \quad U(x) - U(a) = -\int_a^x (-mg) dx = mg(x-a).$$

2) Потенциальная энергия силы упругости:

$$f(x) = -kx, \quad U(x) = -\int_a^x (-kx) dx = (k/2) \cdot (x^2 - a^2).$$



12.3. Центральное поле.

Df. В центральном поле сила, действующая на частицу направлена либо по направлению радиус вектора, либо в противоположном направлении: $F \parallel \pm r$. Центральная сила в общем случае имеет вид:

$$F(\mathbf{r}) = f(r) \cdot \mathbf{e}_r = f(r) \cdot (\mathbf{r} / r)$$

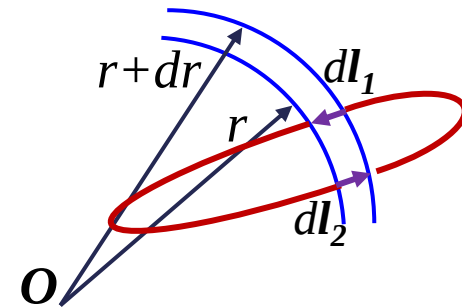
Скалярная функция $f(r)$ зависит только от модуля радиус-вектора $|r| = r$.

12.3.1. Потенциальная энергия в поле центральных сил.

Покажем $\oint \vec{F} d\vec{l} = 0$.

Действительно $F(r) \cdot dl = f(r) \cdot e_r dl = f(r)dr$.

Рассматривая работу на элементах контура между двумя близкими концентрическими сферами имеем: $F(r_1) \cdot dl_1 + F(r_2) \cdot dl_2 = f(r)dr - f(r)dr = 0$.



Примеры центральных полей.

Кулоновское поле. (поле тяготения, электростатическое поле)

$$F(r) = (\alpha/r^2) \cdot e_r = (\alpha/r^2) \cdot (r/r),$$

$$U(r) - U(a) = -\int_a^r (\alpha/r^2) dr = \alpha/r - \alpha/a.$$

Стандартно выбирают константу так, что при $a \rightarrow \infty$, $U(\infty) = 0$.

Выбор константы $U(a)$ называется калибровкой потенциальной энергии.

Потенциальная энергия изотропного гармонического осциллятора.

$$F(r) = -k \cdot r,$$

$$U(r) - U(a) = -\int_a^r (-kr) dr = kr^2/2 - ka^2/2.$$

Калибровка: $a = 0$, $U(a) = 0$.

13. Закон сохранения энергии.

Работа, совершаемая произвольной силой на заданном пути изменяет кинетическую энергию:

$$A_{12} = K_2 - K_1 = (1/2) \cdot m v_2^2 - (1/2) \cdot m v_1^2 .$$

Если сила является потенциальной (консервативной), то работа:

$$A_{12} = -(U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)) = U_2 - U_1 .$$

Объединяя

$$K_2 - K_1 = A_{12} = - (U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)),$$

или :

$$\begin{aligned} K_2 + U_2 &= K_1 + U_1, \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= K + U = const . \end{aligned}$$

Утверждение.

«Полная энергия равная сумме кинетической K и потенциальной энергий U в поле **консервативных** сил сохраняется».

– закон сохранения энергии.

**13.1. Покажем, для замкнутой системы частиц в случае
потенциальных взаимных сил**

$$dE / dt = 0$$

из чего следует, что $E = \text{const}$.

Действительно дифференцируя по времени:

$$d / dt (E = K + U) = dK / dt + dU / dt ,$$

Т.к. $K = \sum_i (m_i v_i^2 / 2) ,$

то $dK / dt = \sum_i (\partial K / \partial v_i) \cdot d v_i / dt =$
 $= \sum_i (m_i v_i) \cdot (d v_i / dt) .$

Определим

$$dU / dt .$$

Имеем: вся потенциальная энергия системы является суммой взаимных вкладов (очевидно $i \neq k$ – исключено самодействие) :

$$U(r_1, \dots, r_N) = \sum_{(i, k; i < k)} U(r_i - r_k).$$

Учитывая, что взаимная сила есть минус градиент потенциальной энергии:

$$\mathbf{F}_{ik} = - \partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) / \partial \mathbf{r}_i ,$$

находим: $dU / dt = \sum_i (\partial U / \partial \mathbf{r}_i) \cdot d \mathbf{r}_i / dt = - \sum_i (\mathbf{F}_i) \cdot \mathbf{v}_i$.

Объединяя:

$$\begin{aligned} dK / dt + dU / dt &= \sum_i (m_i \mathbf{v}_i) \cdot (d \mathbf{v}_i / dt) - \sum_i (\mathbf{F}_i) \cdot \mathbf{v}_i = \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i (m_i (d \mathbf{v}_i / dt) - \mathbf{F}_i) = 0 ! \end{aligned}$$

$m_i (d \mathbf{v}_i / dt) = \mathbf{F}_i$ - **второй закон Ньютона.**

Полная энергия сохраняется.!

Рассмотрена замкнутая система попарно взаимодействующих частиц в отсутствие внешних силовых источников.

**Сохраняется ли полная энергия,
если внешние условия меняются?**

Рассматривается подсистема из s штук частиц, $s < N$.

Частицы при $k = s+1, \dots, N$ создают внешние условия.

Траектории их заданы $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t)$.

**Потенциальная энергия подсистемы s складывается из
собственной энергии попарного взаимодействия
при $i, k < s$, а также энергии взаимодействия
подсистемы s с внешним окружением,**

Индексы внешних частиц $k = s+1, \dots, N$:

$$U_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, t) = \sum_{(i, k=1; i < k)}^s U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) + \\ + \sum_{(i=1)}^s \sum_{(k=s+1)}^N U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k).$$

Тогда:

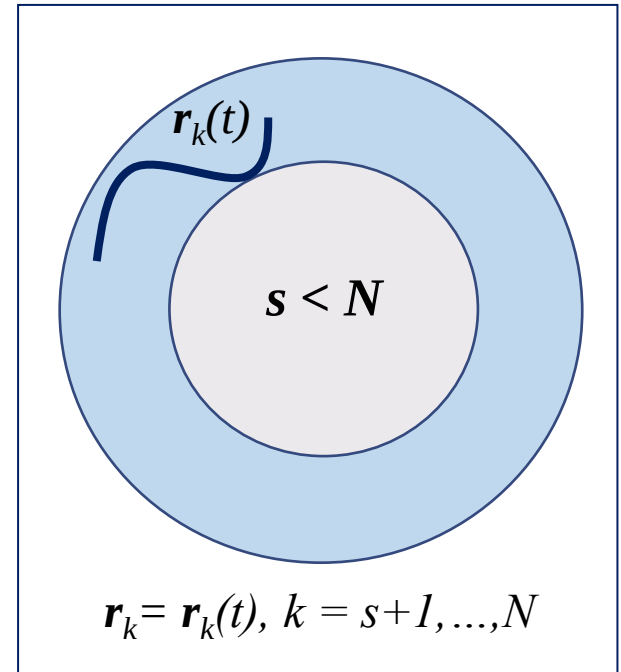
$$dE_s/dt = \sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i (m_i (d\mathbf{v}_i/dt) - \mathbf{F}_i) + \partial U_s / \partial t = \\ = \partial U_s / \partial t.$$

Утверждение.

Если внешние условия стационарны,

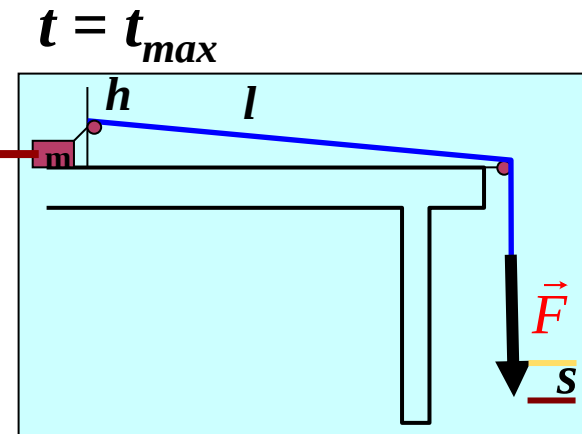
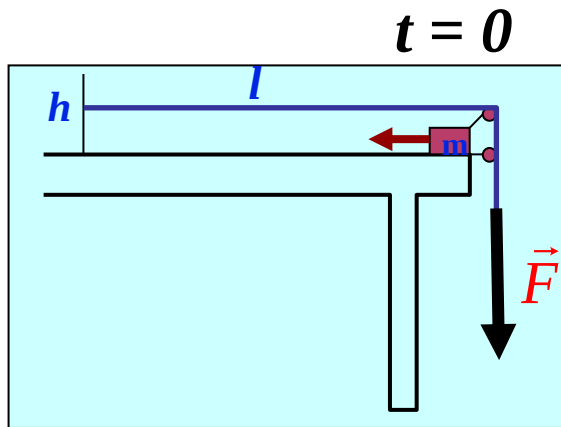
т.е. $\partial U_s / \partial t = 0$,

тогда энергия подсистемы сохраняется.!



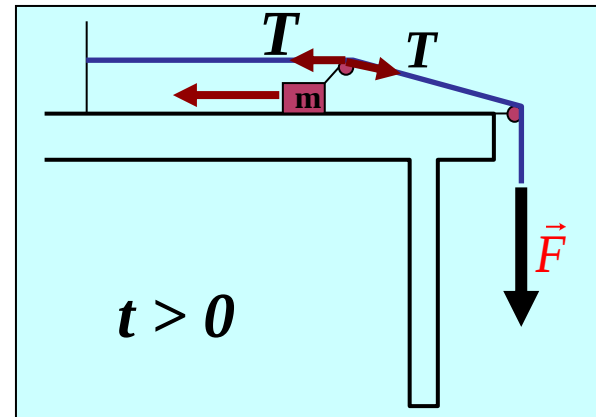
Пример.

Грузик массы m стоит на гладком столе. Через блоки, один из которых закреплен на грузике, а другой на столе, перекинута нить. Один конец нити закреплен на вертикальном неподвижном стержне (слева), к другому приложена постоянная сила F , действующая вертикально вниз. Найти скорость грузика, движущегося влево, в момент, когда он пролетит мимо стержня.

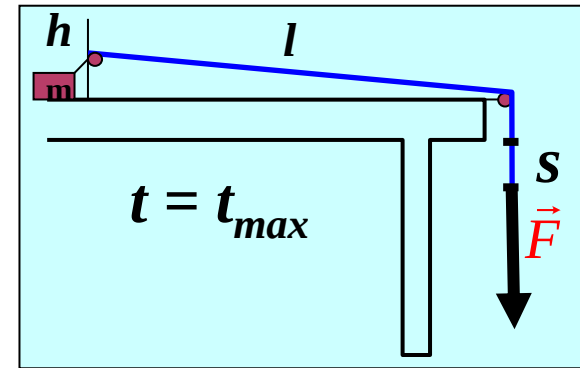
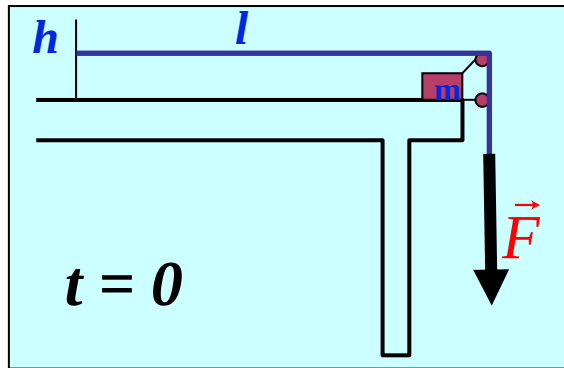


Для решения на основе законов динамики требуется знать величину проекции результирующей сил натяжения нити на горизонтальную ось. Тогда записывается закон движения. Однако величина результирующей силы меняется в зависимости от положения грузика. Задача интегрирования сложная.

$$m\ddot{x} = F_x^{(\text{res})}$$



Пример. Продолжение.



Применим закон сохранения энергии:
работа внешней силы F на вертикальном пути Δ равна изменению полной энергии грузика $E = K + U$.

$$\Delta K = \frac{mv^2}{2} = F \cdot s, \quad s = l + h - \sqrt{l^2 + h^2}$$
$$v = \sqrt{\frac{2Fs}{m}}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

<http://phys.nsu.ru/fit>

<http://el.nsu.ru>